Exercise 1.3

Q1. सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है |

हल :

इसके विपरीत मान लीजिए कि $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है |

हम किसी भी परिमेय संख्या को p/q के रूप में व्यक्त कर सकते है जहाँ p तथा q दो पूर्णांक है और $q \neq 0$ है |

इसलिए,

$\frac{p}{q} = \sqrt{5}$

p तथा q को उभयनिष्ठ गुणनखंड से विभाजित करके $\sqrt{5} = \frac{a}{b}$ प्राप्त कर सकते है जहाँ a और b सहअभाज्य (co-prime) है |

अत: $\sqrt{5} = \frac{a}{b}$

या $\sqrt{5}\ b = a$

दोनों तरफ वर्ग करने पर

$$5b^2 = a^2$$

या $$b^2 = \frac{a^2}{5}$$

यहाँ 5 a^2 को विभाजित करता है अत: 5 a को भी विभाजित करेगा | ....(1)

[प्रमेय 1.3 द्वारा]

अत: a = 5c माना **[क्योंकि a 5 द्वारा विभाजित होता है |]**

$5b^2 = a^2$ में $a = 5c$ रखने पर

$\Rightarrow \quad 5b^2 = (5c)^2$

$\Rightarrow \quad 5b^2 = 25c^2$

$\Rightarrow \quad b^2 = 5c^2$

$\Rightarrow \quad c^2 = \frac{b^2}{5}$

यहाँ 5 b^2 को विभाजित करता है अत: 5 b को भी विभाजित करेगा | ....(2)

[**प्रमेय 1.3 द्वारा**]

समीकरण (1) तथा (2) से हम पाते है कि 5 a तथा b दोनों को विभाजित करता है जिसमें 5 एक उभयनिष्ठ गुणनखंड है |

इससे हमारी इस तथ्य का विरोधाभास प्राप्त होता है कि a तथा b में 1 के अतिरिक्त कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है |

यह विरोधाभासी परिणाम हमारी गलत कल्पना से प्राप्त हुआ है कि

अत: $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है |

Q2. सिद्ध कीजिए कि 3 + 2√5 एक अपरिमेय संख्या है |

हल :

इसके विपरीत मान लीजिए कि 3 + 2√5 एक परिमेय संख्या है |

हम किसी भी परिमेय संख्या को p/q के रूप में व्यक्त कर सकते है जहाँ p तथा q दो पूर्णांक है और q ≠ 0 है |

इसलिए,

$\frac{p}{q} = 3 + 2\sqrt{5}$

और p तथा q को उभयनिष्ठ गुणनखंड से विभाजित कर एक सह-अभाज्य संख्या a तथा b प्राप्त कर सकते हैं |

अत: $3 + 2\sqrt{5} = \frac{a}{b}$

या $2\sqrt{5} = \frac{a}{b} - 3$

या $2\sqrt{5} = \frac{a-3b}{b}$

या $\sqrt{5} = \frac{a-3b}{2b}$

चूँकि a तथा b पूर्णांक है और 2 तथा 3 भी पूर्णांक है |

इसलिए $\frac{a-3b}{2b}$ एक परिमेय संख्या है जबकि वाया पक्ष √5 एक अपरिमेय संख्या है |

इससे एक विरोधाभासी परिणाम प्राप्त होता है कि √5 परिमेय संख्या है |

ऐसा विरोधाभासी परिणाम हमारी गलत कल्पना से प्राप्त हुआ है कि 3 + 2√5 एक परिमेय संख्या है |

अत: 3 + 2√5 एक अपरिमेय संख्या है |

Q3. सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित संख्याएँ अपरिमेय हैं :

(i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **(ii)** $7\sqrt{5}$ **(iii)** $6 + \sqrt{2}$

हल:

(i) सिद्ध कीजिए कि $\frac{1}{\sqrt{2}}$ अपरिमेय संख्या हैं |

इसके विपरीत मान लीजिए कि $\frac{1}{\sqrt{2}}$ एक परिमेय संख्या है |

हम किसी भी परिमेय संख्या को p/q के रूप में व्यक्त कर सकते है जहाँ p तथा q दो पूर्णांक है और q ≠ 0 है |

इसलिए,

$\frac{p}{q} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

p तथा q को उभयनिष्ठ गुणनखंड से विभाजित करके $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a}{b}$ प्राप्त कर सकते है जहाँ a और b सहअभाज्य (co-prime) है |

अत: $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a}{b}$

या $b = a\sqrt{2}$

दोनों तरफ वर्ग करने पर

$$b^2 = 2a^2$$

या $a^2 = \frac{b^2}{2}$

यहाँ 2 b^2 को विभाजित करता है अत: 2, b को भी विभाजित करेगा | ....(1)

[**प्रमेय 1.3 द्वारा**]

अत: b = 2c माना [**क्योंकि a 5 द्वारा विभाजित होता है |**]

$b^2 = 2a^2$ में $b = 2c$ रखने पर

$\Rightarrow \quad (2c)^2 = 2a^2$

$\Rightarrow \quad 4c^2 = 2a^2$

$\Rightarrow \quad 2c^2 = a^2$

$\Rightarrow \quad c^2 = \frac{a^2}{2}$

यहाँ 2 a^2 को विभाजित करता है अत: 2 a को भी विभाजित करेगा | ....(2)

[**प्रमेय 1.3 द्वारा**]

समीकरण (1) तथा (2) से हम पाते है कि 2 a तथा b दोनों को विभाजित करता है जिसमें 2 एक उभयनिष्ठ गुणनखंड है |

इससे हमारी इस तथ्य का विरोधाभास प्राप्त होता है कि a तथा b में 1 के अतिरिक्त कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है, क्योंकि हमने a तथा b को सह-अभाज्य प्राप्त किया था |

यह विरोधाभासी परिणाम हमारी गलत कल्पना से प्राप्त हुआ है कि

अत: $\frac{1}{\sqrt{2}}$ एक अपरिमेय संख्या है |

(ii) सिद्ध कीजिए कि $7\sqrt{5}$ अपरिमेय संख्या हैं |

हल :

इसके विपरीत मान लीजिए कि $7\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है |

हम किसी भी परिमेय संख्या को p/q के रूप में व्यक्त कर सकते है जहाँ p तथा q दो पूर्णांक है और q ≠ 0 है |

इसलिए,

$\frac{p}{q} = 7\sqrt{5}$

p तथा q को उभयनिष्ठ गुणनखंड से विभाजित करके $7\sqrt{5} = \frac{a}{b}$ प्राप्त कर सकते है जहाँ a और b सहअभाज्य (co-prime) है |

अत: $7\sqrt{5} = \frac{a}{b}$

या $7\sqrt{5}\ b = a$

या $\frac{a}{7b} = \sqrt{5}$

चूँकि a तथा b पूर्णांक है और 7 भी पूर्णांक है |

इसलिए $\frac{a}{7b}$ एक परिमेय संख्या है जबकि दांया पक्ष √5 एक अपरिमेय संख्या है |

इससे एक विरोधाभासी परिणाम प्राप्त होता है कि √5 परिमेय संख्या है |

ऐसा विरोधाभासी परिणाम हमारी गलत कल्पना से प्राप्त हुआ है कि 7√5 एक परिमेय संख्या है |

अत: 7√5 एक अपरिमेय संख्या है |

(iii) सिद्ध कीजिए कि 6 + $\sqrt{2}$ अपरिमेय संख्या हैं |

हल :

इसके विपरीत मान लीजिए कि 6 + √2 एक परिमेय संख्या है |

हम किसी भी परिमेय संख्या को p/q के रूप में व्यक्त कर सकते है जहाँ p तथा q दो पूर्णांक है और q ≠ 0 है |

इसलिए,

$\frac{p}{q} = 6 + \sqrt{2}$

और p तथा q को उभयनिष्ठ गुणनखंड से विभाजित कर एक सह-अभाज्य संख्या a तथा b प्राप्त कर सकते हैं |

अत: $6 + \sqrt{2} = \frac{a}{b}$

या $\sqrt{2} = \frac{a}{b} - 6$

या $\sqrt{2} = \frac{a-6b}{b}$

चूँकि a तथा b पूर्णांक है और 6 भी पूर्णांक है |

इसलिए $\frac{a-6b}{b}$ एक परिमेय संख्या है जबकि वाया पक्ष $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है |

इससे एक विरोधाभासी परिणाम प्राप्त होता है कि $\sqrt{2}$ परिमेय संख्या है |

ऐसा विरोधाभासी परिणाम हमारी गलत कल्पना से प्राप्त हुआ है कि $6 + \sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है |

अत: $6 + \sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है |